Su alcuni aspetti delle curve funicolari

La materializzazione delle linee matematiche - Le linee a spessore costante - Le lunule

Corrado BROGI

In Ricordo del
Prof. Giovanni Sansone

Premessa

Un aspetto veramente singolare delle curve funicolari è che « di fatto » non esistono, e, non solo non esistono, ma è anche improprio attribuire loro una unica funzione matematica.

Lungo una linea priva di spessore non può trasmettersi alcuna azione, occorre uno spessore « materiale » attraverso il quale per interazione dei singoli elementi possa trasmettersi il fenomeno. La trasmissione avviene spazialmente.

Oggetto del presente studio è la dimostrazione che, in generale, data una funzione matematica che definisca una linea di una certa specie a curvatura variabile, la linea che dista da essa di uno spessore costante s, è una linea di specie diversa. Cioè, per esempio, se la linea data è una parabola, la linea che dista da essa di uno spessore costante non è più una parabola. Così tutte le altre linee a curvatura variabile; quindi strisce *a spessore costante* possono essere delimitate da funzioni matematiche della stessa specie solo se tali funzioni sono cerchi concentrici, o rette. (Le rette possono essere considerate cerchi di raggio indefinitamente grande).

Le implicazioni di questo assunto appaiono interessanti ed applicabili ai fenomeni fisici in generale. Limitando l'analisi alle curve funicolari appare chiaro che non ha senso la ricerca della linea funicolare priva di spessore, perché non appena questa si materializza in un condotto di sezione piccola a piacere, le linee che delimitano tale condotto sono funzioni matematiche *diverse* da quella costituente il suo asse. La trasmissione avviene *spazialmente* in tutte le direzioni (ciò è ben noto), d'altra parte le linee di frattura (cretti) ([1]) che appaiono sulla superficie delimitanti il corpo in esame, almeno macroscopicamente seguono linee matematiche.

A questo proposito abbiamo voluto sperimentare quanto esponemmo nell'Articolo pubblicato sul Bollettino Ingegneri N. 2/3 dell'anno 1977. Abbiamo così artigianamente costruito un modellino simulante una parete, esso è costituito da due lastre di vetro parallele e formanti una intercapedine di circa un centimetro, aperta in alto, chiusa lateralmente, però avente in basso un tratto di base cedevole comandata dall'esterno. (Il tratto cedevole è lungo un sesto di braccio toscano). Il modellino è stato costruito per poter sperimentare su materiali non resistenti a trazione (abbiamo scelto la sabbia). Nella sperimentazione e nei calcoli occorre tener presente l'attrito fra sabbia e parete di vetro, e l'effetto di costipamento e di impedimento alle deformazioni trasversali che tali lastre di vetro operano sulla sabbia. A tal fine si può usare sabbia con diversi gradi di umidificazione e determinare sperimentalmente i coefficienti che interessano.

Nell'articolo citato avevamo rilevato l'esistenza di due catenarie per un punto assegnato, avevamo dimostrato che le due catenarie sono curve di equilibrio rispetto al peso di parete gravante su di esse delimitato dalla porzione di parete compresa fra l'asse delle ascisse e le catenarie stesse ([2]).

Supponendo che la base a sostegno della parete cedesse avevamo descritto quale avrebbe dovuto essere la modalità del crollo.

Presentiamo solo alcune fotografie dell'esperimento ora effettuato (le foto sono state scattate il 1/5/1981).

— La foto N. 1 - Mostra l'angolo di natural declivio della sabbia (asciutta) immessa nel modellino con un imbuto.

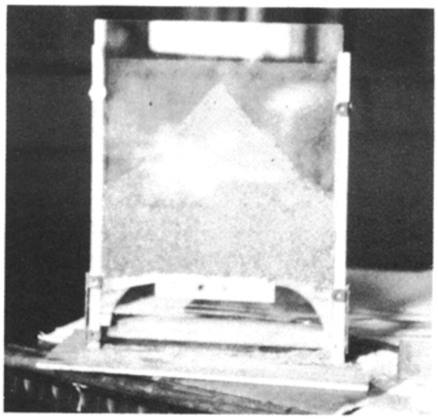

Fig. 1.

— La foto N. 2 - Mostra la curva limite inferiore della parete di sabbia franata per il cedimento della base nonché il cretto della curva superiore. (Cfr. Art. cit., pag. 36, II^a colonna, cap. 1).

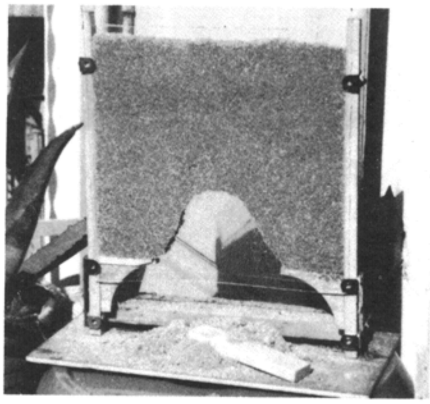

Fig. 2.

— La foto N. 3 - Mostra il cappio delle due curve costituito da sabbia leggermente umidificata che ha ceduto per brusca scossa sussultoria. (Cfr. Art. cit., pag. 26, II^a colonna, cap. 2).

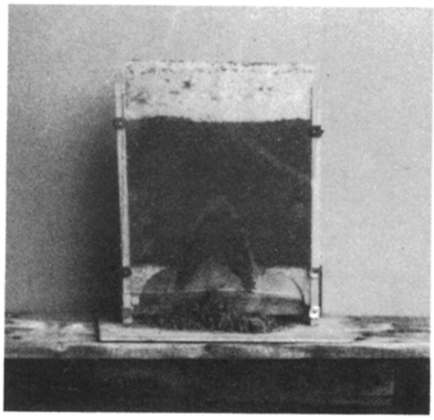

Fig. 3.

La meravigliosa corrispondenza fra quanto previsto nell'Art. cit. e l'esperimento ora effettuato, ci ha convinti a pubblicare questo studio.

Posizione del problema

Dato un insieme di punti P tali che: $y_P = f_P(x_P)$ ed un insieme di punti Q tali che la $y_Q = f_Q(x_Q)$ ed i due insiemi delimitino una striscia di *spessore costante*, dimostrare a quali condizioni la f_P e la f_Q sono della stessa specie.

---

[1]) Tali linee (cretti) sono l'intersezione fra le superfici di trasmissione, ove gli elementi tendono ad allontanarsi, e la superficie delimitante il solido.
I punti, le linee, le superfici, non esistono « in se », le pensiamo noi uomini estrapolando casi limite inesistenti in natura. Così non esistono infiniti o infinitesimi di vario ordine. Il cosiddetto vuoto è un assurdo.

[2]) Ad evitare grossolani fraintesi precisiamo, che è noto, che dati tre punti disposti come i vertici di un triangolo isoscele, se ricerchiamo quale linea (arco a tre cerniere) risulta soggetta solo a compressione per effetto di un carico uniforme sull'orizzontale essa risulterà essere una parabola. Però la nostra parete ha il bordo superiore orizzontale e non parabolico. (La catenaria ha il peso distribuito lungo la sua linea curva e non secondo l'orizzontale). Purtroppo si notano ancora testi di autorevoli studiosi che affermano essere paraboli certi cretti che in effetti sono catenarie e la loro affermazione non è suffragata da sufficiente sviluppo analitico.

Sia s lo spessore costante della striscia, e sia $y'_P = \operatorname{tang}\alpha$, per cui:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y'_P}{\sqrt{1+y'^2_P}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2_P}}$$

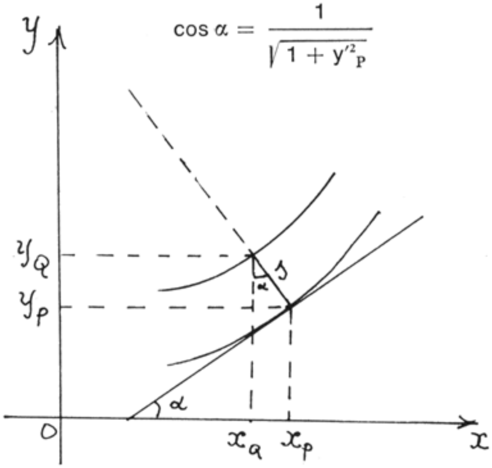

Fig. 4.

avremo:

$$(1)\quad \begin{cases} x_Q = x_P - s\,\dfrac{y'_P}{\sqrt{1+y'^2_P}} \\[2ex] y_Q = y_P + s\,\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2_P}} \end{cases}$$

differenziando le due equazioni e sostituendo:

$$R_P = \frac{y''_P}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

otteniamo:

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_Q}{dx_P} = \left(1 - \dfrac{s}{R_P}\right) \\[2ex] \dfrac{dx_Q}{dx_P}\, y'_Q = y'_P \left(1 - \dfrac{s}{R_P}\right) \end{cases}$$

per cui ovviamente:

$$(3)\qquad \boxed{y'_Q = y'_P}$$

La (3) implica che le due linee $y_P = f_P(x_P)$ ed $y_Q = f_Q(x_Q)$ hanno tangenti parallele nei punti P e Q estremi del segmento s ad esse perpendicolare. Essendo s la distanza costante fra le due linee (larghezza della striscia), ne consegue che i due raggi di curvatura R_P in P ed R_Q in Q debbono giacere sulla stessa retta di s.

Differenziando la (3) otteniamo:

$$(4)\qquad \boxed{\frac{dx_Q}{dx_P}\, y''_Q = y''_P}$$

Sostituendo nella (4) la prima delle (2) si ha:

$$(4')\qquad \boxed{y''_Q\left(1 - \frac{s}{R_P}\right) = y''_P}$$

dividendo per:

$$(1+y'^2_Q)^{3/2} = (1+y'^2_P)^{3/2}$$

otteniamo:

$$\frac{1}{R_Q}\left(1 - \frac{s}{R_P}\right) = \frac{1}{R_P}$$

da cui:

$$(5)\qquad \boxed{R_Q = R_P - s}$$

La (5) implica che i raggi di curvatura R_P ed R_Q debbono avere lo stesso centro (differendo sempre del segmento costante s).

A queste condizioni rispondono solo i cerchi concentrici ed al limite le rette parallele.

Conclusione

Quanto abbiamo esposto porterebbe a considerare che le sezioni piane dei nuclei di materia capaci di trasmettere azioni fisiche sarebbero delimitate da cappi di curve (lunule) finite o indefinite.

È veramente notevole che nel V secolo a. C. il matematico Ippocrate di Chio (da non confondere con Ippocrate di Cos, maestro della medicina) studiasse le « lunule » e che giungesse a dimostrare il celebre teorema per il quale l'area delle due lunule in figura (delimitate da semicerchi) è equivalente all'area del triangolo ABC.

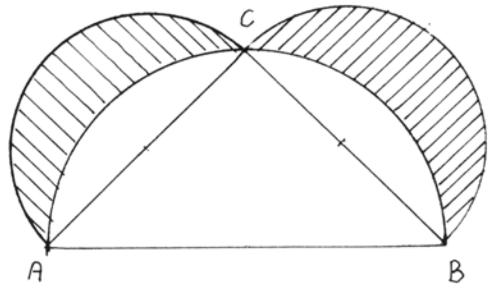

Fig. 5.

Spazialmente appare quindi come se la trasmissione dei fenomeni fisici seguisse una unica legge, sia a livello macroscopico che microscopico: una specie di fronte di onde che richiama alla mente le geometrie rilevabili in foto ottenute al microscopio a ioni di campo. Tale microscopio infatti ingrandendo più di un milione di volte porta la visione a distinguere particelle di ordine atomico.

Corrado BROGI è nato nel 1920 a Firenze ove risiede e svolge attività professionale di ricerca, si è laureato a Bologna nel 1968 e ha già pubblicato vari saggi sull'argomento nella nostra rivista.